

考虑温度效应的悬索超谐波共振响应研究^{*}

赵珧冰^{1†}, 金波², 赵跃宇², 黄超辉¹

(1. 华侨大学 土木工程学院, 福建 厦门 361021; 2. 湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

摘要:引入与张拉力和垂度相关的无量纲参数,可推导出整体温度变化影响下悬索面内非线性运动微分方程.首先利用 Galerkin 法得到离散后的无穷维方程,然后运用多尺度法求解其二阶和三阶单模态超谐波共振响应的近似解,并得到幅频响应方程,最后通过数值算例探究三种垂跨比的悬索,温度变化对其单模态超谐波共振响应的影响.研究表明:当垂跨比较小时,一定程度的温度变化会导致其超谐波共振响应发生定性和定量的改变,改变系统软硬弹簧的性质和程度,即改变其幅频响应曲线的偏转方向和程度;温度变化会改变激励-响应幅值曲线的单值/多解情况.然而当垂跨比逐渐增大后,温度变化对其共振响应仅会产生定量的影响,且温度变化与幅频响应曲线向左偏转程度呈正比,即温度上升,曲线向左偏转程度加剧,软弹簧特性增强,反之则减弱.由于悬索存在初始张拉力,升高和降低相同温度对超谐波共振特性影响呈现出不对称性.

关键词:悬索;温度变化;多尺度法;振动特性;超谐波共振;幅频响应曲线

中图分类号:U441.3,U448.35

文献标志码:A

Investigation of Super-harmonic Resonance Response of Suspended Cables Considering Temperature Variation Effects

ZHAO Yaobing^{1†}, JIN Bo², ZHAO Yueyu², HUANG Chaohui¹

(1. College of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China;

2. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: By introducing two non-dimensional parameters related to the cable tension force and sag, in-plane nonlinear equations for motion of the suspended cable considering the temperature effect were derived. Firstly, the nonlinear partial differential equation was discretized by the Galerkin method. Then, the approximate solutions of the second and third order single mode super-harmonic resonances of the suspended cable were obtained by the multiple scales method, and the corresponding frequency response equations were also derived. Finally, the effect of temperature variations on the single mode super-harmonic resonances of the suspended cable with three different sag-to-span ratios was illustrated by the numerical

^{*} 收稿日期:2017-05-14

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11602089), National Natural Science Foundation of China(11602089); 湖南省科技厅科技项目(201525), Science and Technology Program of Hunan Province (201525); 福建省自然科学基金青年创新项目(2016J05011), Natural Science Foundation of Fujian Province (2016J05011); 福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JAT160025), Research Foundation of Education Bureau of Fujian Province (JAT160025); 华侨大学中青年教师科研提升资助计划项目(ZQN-YX505), Promotion Program for Young and Middle-aged Teacher in Science and Technology Research of Huaqiao University (ZQN-YX505)

作者简介:赵珧冰(1988—),男,湖南湘潭人,华侨大学讲师,博士

† 通讯联系人, E-mail: Ybzhao@hqu.edu.cn

calculations. The numerical results show that; in the case of small sag-to-span ratio, the nonlinear vibration characteristics would be changed by a certain degree of the temperature change quantitatively and qualitatively, the softening and hardening spring behaviors are changed, and it means that the degree and direction of the frequency response curves are changed. The single/multi-values of the excitation-response amplitude curves are also varied by the temperature variations. However, with the increase of the sag-to-span ratio, only some quantitative changes are found under the thermal effect. With the increase of the temperature change, the frequency response curves are bent to the left much more, and the softening spring characteristic is also increased. Moreover, due to the initial tension force of the suspended cable, the effects of warming and cooling conditions on the vibration characteristics of the suspended cable are not symmetric.

Key words: suspended cable; temperature variations; multiple scales method; vibration characteristics; super-harmonic resonance; frequency response curves

在土木工程、水利水电、机械工程、桥梁工程、海洋工程和航空航天领域中广泛应用的索结构,其结构特性受周围环境因素(如太阳辐射、温度变化、湿度、风以及降水等)影响非常明显,而其中以温度变化的影响较为突出.研究表明,索结构的振动频率、模态振型、阻尼系数、材料弹性模量,甚至是边界条件等,都或多或少与温度变化相关^[1].研究发现:温度效应与损伤效应对索结构振动特性的影响处于同一个数量级^[2].由此不难看出研究温度变化影响下索结构的振动特性意义重大.近年来,在索结构健康监测、损伤识别和索力测试等实际工程中^[3]以及大跨度斜拉桥的非线性动力学等理论研究中^[4],研究人员越来越重视温度效应对索结构振动特性的影响.

由于存在垂度和初始张力,使得悬索成为一类典型的、运动方程中同时包含平方和立方非线性项的柔性结构^[5-6].在各类荷载或支座运动激励下,悬索很容易发生各类共振响应,导致结构发生大幅运动,比如:主共振、超谐波共振、次谐波共振、联合共振、组合共振、参数共振和内共振等^[7-8].对于悬索的非线性动力学方程,其稳态响应有可能由与激励相同频率的特解及自由振动项所组成.而由于运动方程中平方和立方非线性项的存在,其自由振动项的频率有可能恰好变为激励频率的2倍或3倍,此时悬索将发生二阶或三阶超谐波共振^[9].已有学者针对考虑温度效应影响下索和索梁结构的频率、张力、非线性自由振动和主共振等特性开展了相关研究^[10-21],但是对于常见的二阶及三阶超谐波共振的情况,温度变化的影响仍值得进一步深入探讨.

综上所述,由于非线性项的次数将改变超谐波共振的阶数,因此本文针对考虑温度变化影响下的

悬索非线性运动微分方程,首先利用 Galerkin 法将方程离散,然后采用多尺度法求得悬索单模态超谐波共振响应的二阶近似解,并得到其幅频响应方程.最后通过数值算例,从幅频响应曲线和激励-响应幅值曲线等方面,探究三种垂跨比的悬索,温度变化对其二阶和三阶超谐波共振响应的影响.

1 数学模型

图1所示为水平悬索构型及其特性,以 O 为坐标原点, OB 连线的方向为 x 方向,重力加速度 g 的方向为 y 方向,建立 Oxy 坐标系.图中悬索跨径为 L ,跨中垂度为 b , x 处的位移分别用 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 表示, $P(x,t)$ 为外激励的分布函数.根据增量热场理论,当周围温度发生整体变化时,悬索会形成新的热应力构型,此时悬索的张力和垂度均会发生变化,从而影响其线性和非线性振动特性.悬索在温度变化状态下的静力学特性可参考文献^[15-16],不赘述.

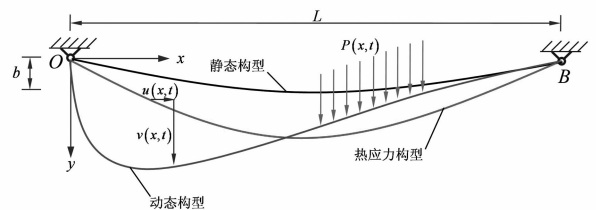


图1 悬索构型及特性

Fig. 1 Configurations and characteristics of the suspended cable

1.1 运动微分方程

本文不考虑温度变化对悬索阻尼系数、线密度、

弹性模量、横截面积以及边界条件的影响. 研究表明^[12]; 温度效应可通过引入两个量纲为1的参数 κ^2 和 χ^2 来体现. 具体而言, χ^2 和 κ^2 分别表示温度变化后与温度变化前的悬索张拉力的比值和垂度的比值^[12,18].

基于上述假设,引入拟静态假设,利用哈密顿变分原理建立悬索面内非线性运动微分方程^[18]:

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c_v \frac{\partial v}{\partial t} - H\chi^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{EA}{L} \left(\kappa^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \times \int_0^L \left[\kappa^2 \frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx = P(x, t). \quad (1)$$

式中: m 为线重; c_v 为每延米阻尼系数; A 为横截面积; y 为悬索线形; E 为弹性模量; H 为水平张力($H = mgL^2 \cos\theta/8b$, $H/EA \ll 1$); L 为跨径; b 为垂度; $P(x, t) = P(x) \cos(\Omega t)$, Ω 为外激励的频率, $P(x)$ 为外激励幅值的分布函数.

引入以下无量纲参数:

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, f^* = \frac{b}{L}, t^* = \sqrt{\frac{g}{8b}} t, \\ c_v^* = \sqrt{\frac{8b}{g}} \frac{c_v}{m}, \Omega^* = \sqrt{\frac{8b}{g}} \Omega, P^* = \frac{PL}{H}, \Theta = \frac{EA}{H}. \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)中,略去表达式上标星号,可得相应的无量纲运动方程:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c_v \frac{\partial v}{\partial t} - \chi^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \Theta \left(\kappa^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \times \int_0^1 \left[\kappa^2 \frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx = P(x) \cos(\Omega t). \quad (3)$$

式中: $y(x) = 4fx(1-x)$ 表示悬索抛物线方程, $f = b/L$ 表示垂跨比.

1.2 Galerkin 离散

假设悬索是由正对称和反对称模态组成的多自由度系统,可利用 Galerkin 法得到离散后的 N 维方程,假设面内运动的位移函数表示为:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \varphi_n(x). \quad (4)$$

式中: N 为模态离散的数目; $q_n(t)$ 是广义坐标函数; $\varphi_n(x)$ 为 n 阶模态函数.

将式(4)代入式(3)中,离散后的多维方程为:

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\mu_n \dot{q}_n - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Gamma_{nij} q_i q_j - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{h=1}^N \Lambda_{nijh} q_i q_j q_h + p_n \cos(\Omega_n t). \quad (5)$$

式中:

$$\mu_n = \int_0^1 c_v \varphi_n^2(x) dx;$$

$$p_n = \int_0^1 P(x) \varphi_n(x) dx;$$

$$\omega_n^2 = -\chi^2 \int_0^1 \varphi_n''(x) \varphi_n(x) dx -$$

$$\kappa^4 \Theta \int_0^1 y''(x) \left[\int_0^1 y'(x) \varphi_n'(x) dx \right] \varphi_n(x) dx;$$

$$\Gamma_{nij} = -\kappa^2 \Theta \int_0^1 \left[\varphi_j''(x) \int_0^1 y'(x) \varphi_i'(x) dx \right] \varphi_n(x) dx -$$

$$\frac{1}{2} \Theta \kappa^2 \int_0^1 \left[y''(x) \int_0^1 \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx \right] \varphi_n(x) dx;$$

$$\Lambda_{nijh} = -\frac{1}{2} \Theta \int_0^1 \left[\varphi_j''(x) \int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_h'(x) dx \right] \varphi_n(x) dx.$$

本文仅考虑悬索的单模态超谐波共振,而不考虑模态间的内共振.为了便于计算及公式推导,再令 $\tau = \omega_n t$,并代入式(5)中,此时悬索单模态非线性运动方程表示为:

$$\ddot{q}_n + q_n + \mu_n \dot{q}_n + c_{2n} q_n^2 + c_{3n} q_n^3 = p_n \cos(\Omega_n \tau). \quad (6)$$

其中忽略式(6)中表达式的上横线:

$$\bar{t} = \frac{\tau}{\omega_n}, \bar{\mu}_n = \frac{\mu_n}{\omega_n}, \bar{c}_{2n} = \frac{\Gamma_{mnn}}{\omega_n^2}, \bar{c}_{3n} = \frac{\Lambda_{mnn}}{\omega_n^2}, \bar{p}_n = \frac{p_n}{\omega_n^2}.$$

2 超谐波共振响应

本文考虑悬索的二阶和三阶单模态超谐波共振,利用多尺度法求解其共振响应的近似解,并推导其幅频响应方程^[22].

2.1 超谐波共振($\Omega \approx 1/2$)

对于二阶超谐波共振的情况,令: $q_n = \epsilon q_n^*$, $\mu_n = \epsilon \mu_n^*$ 以及 $p_n = \epsilon p_n^*$, 将其代入式(6)中,并忽略表达式中的上标星号,可得:

$$\ddot{q}_n + q_n + \epsilon \mu_n \dot{q}_n + \epsilon c_{2n} q_n^2 + \epsilon^2 c_{3n} q_n^3 = p_n \cos(\Omega_n t). \quad (7)$$

式中: ϵ 为无量纲小参数.

对于有阻尼弱非线性系统,多尺度法可方便解决,引入新的时间尺度 $T_n = \epsilon^n \tau$, ($n=0, 1, 2$), 式(7)的解表示为:

$$q_n(\tau; \epsilon) = \sum_{m=0}^2 \epsilon^m q_m(T_0, T_1, T_2). \quad (8)$$

将式(8)代入(7)中,令方程两端 ϵ^0 、 ϵ^1 和 ϵ^2 的

系数相等,得到3个微分方程.对于悬索的二阶超谐波共振,此时外激励频率 Ω_n 可表示为:

$$2\Omega_n = 1 + \epsilon\sigma_n. \quad (9)$$

式中: σ_n 为调谐参数.

求解上述微分方程,最终可得悬索二阶超谐波共振响应时的幅频响应方程^[22]:

$$\frac{\mu_n^2 a^2}{4} + \left(\sigma_n + c_{4n} a^2 + c_{5n} \Lambda_n^2 + \frac{\mu_n^2}{8} \right) a^2 = \quad (10)$$

$$c_{2n}^2 \Lambda_n^4 \left[\left(1 - \frac{\sigma_n}{2} \right)^2 + \mu_n^2 c_{6n}^2 \right].$$

式中: a 为共振响应幅值;

$$\Lambda_n = \frac{p_n}{2(1 - \Omega_n^2)}; c_{4n} = \frac{5}{12} c_{2n}^2 - \frac{3}{8} c_{3n};$$

$$c_{5n} = 2c_{2n}^2 - 3c_{3n} - \frac{2c_{2n}^2}{\Omega_n^2 + 2\Omega_n} - \frac{2c_{2n}^2}{\Omega_n^2 - 2\Omega_n};$$

$$c_{6n} = \frac{1}{4} + \frac{2\Omega_n}{\Omega_n^2 - 1}.$$

2.2 超谐波共振($\Omega \approx 1/3$)

同理,对于三阶超谐波共振,令: $q_n = \epsilon q_n^*$, $\mu_n = \epsilon^2 \mu_n^*$ 以及 $p_n = \epsilon p_n^*$, 忽略式中上标星号,式(6)可以表示成:

$$\ddot{q}_n + q_n + \epsilon^2 \mu_n \dot{q}_n + \epsilon c_{2n} q_n^2 + \epsilon^2 c_{3n} q_n^3 = p_n \cos(\Omega_n t). \quad (11)$$

对于三阶超谐波共振,外激励频率表示为:

$$3\Omega_n = 1 + \epsilon^2 \sigma_n. \quad (12)$$

利用上节相同的多尺度法,求得悬索发生三阶超谐波共振时的幅频响应方程^[22]:

$$\frac{\mu_n^2 a^2}{4} + (\sigma_n + c_{4n} a^2 + c_{7n} \Lambda_n^2)^2 a^2 = c_{8n}^2 \Lambda_n^6. \quad (13)$$

式中: a 为共振响应的幅值;

$$c_{7n} = 2c_{2n}^2 - 3c_{3n} - \frac{2c_{2n}^2}{\Omega_n^2 + 2\Omega_n} - \frac{2c_{2n}^2}{\Omega_n^2 - 2\Omega_n};$$

$$c_{8n} = c_{3n} + \frac{2c_{2n}^2}{4\Omega_n^2 - 1}.$$

3 算例研究

假设悬索弹性模量、线重和阻尼系数等均与温度变化无关,其余各项物理参数分别为: $L=200.0$ m, $A=7.069 \times 10^{-2}$ m², $E=200$ GPa, $\rho=7800.0$ kg/m³, $\alpha=1.2 \times 10^{-5}$ /°C 以及 $g=9.81$ m/s², 无量纲的激励幅值及阻尼系数分别为 0.02 和 0.005. 温度变化越剧烈,系统振动特性受温度效应的影响也就越明显,结合实际工程情况,本文温度变化的范围选择为 $\Delta T = \pm 40$ °C. 当温度发生改变时,利用直接

方法对悬索展开静力分析,从而求得两个无量纲参数 κ^2 和 χ^2 大小^[12,18], 结果见表 1.

表 1 温度变化下无量纲参数大小
Tab. 1 Values of two non-dimensional factors under temperature variations

参数	ΔT /°C	$f=0.006$	$f=0.01$	$f=0.015$
	-40	1.278 3/0.782 2	1.371 3/0.729 2	1.340 7/0.745 8
χ^2/κ^2	0	1.000 0/1.000 0	1.000 0/1.000 0	1.000 0/1.000 0
	+40	0.746 4/1.339 7	0.735 2/1.360 1	0.793 0/1.261 1

表 1 给出了温度变化条件下,两个无量纲参数的大小.由于悬索的垂跨比 f 大小对其非线性动力学特性影响明显,因此本文研究三类垂跨比的悬索.由表 1 可知:当不考虑温度变化时,两个无量纲参数恒等于 1,此时本文所有推导的方程可以退化到已有文献的计算结果^[22];随着垂跨比由小到大,温度变化对张拉力和垂度的影响会出现峰值,温度效应并不会随着垂跨比增加而一直增强^[15];由于悬索存在初始张力,升高和降低相同温度对其张拉力和垂度的影响不对称^[16].

研究表明:温度变化与悬索固有频率之间的正、反比例关系及初始张力有关^[16],而平方和立方非线性项的系数大小则与温度变化基本呈正比例关系.图 2 和图 3 分别描绘了对于上述三类垂跨比悬索,发生单模态超谐波共振时,整体温度变化对其幅频响应曲线的影响.悬索发生超谐波共振响应时,会出现多值和跳跃现象,而初始条件决定了系统在物理上最终的稳态解.温度变化对悬索超谐波共振的影响非常明显,其影响程度与垂跨比密切相关.

图 2 给出了当外激励频率 $\Omega \approx 1/2$ 时,悬索发生超谐波共振时的幅频响应曲线.根据李雅普诺夫稳定性理论可以对所得稳态解的稳定性进行判断,其中实线表示稳定解,虚线表示不稳定解.图 2(a)中,悬索垂跨比非常小($f=0.006$),此时相比于自由振动和主共振而言^[17-18],温度变化对超谐波共振不仅仅是定量的影响.当不考虑温度变化时,曲线向右偏转,展现出硬弹簧特性;温度下降时,曲线向右偏转加剧,硬弹簧特性增强;然而当温度上升时,幅频响应曲线向左偏转,此时由硬弹簧特性转变为软弹簧特性.

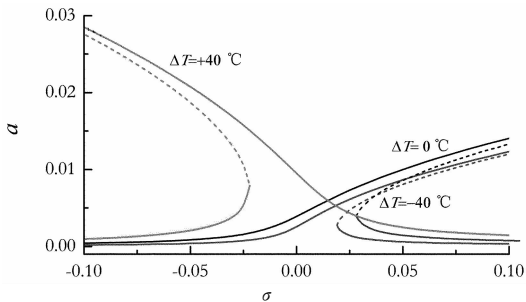
而图 2(b)中,悬索的垂跨比为 0.01,当不考虑温度变化影响时,曲线向左偏转;温度升高,曲线向左偏转加剧,软弹簧特性增强;当温度下降时,曲线向右偏转.不难看出,对于垂跨比较小的悬索($f=0.006$ 和 $f=0.01$),温度变化会导致其超谐波共振

响应发生定性和定量的改变,改变幅频响应曲线的偏转方向和偏转程度.

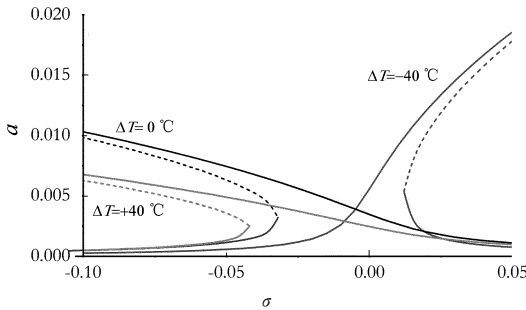
对于图 2(c),此时垂跨比的大小为 0.015,不难看出在温度变化影响下,振动特性并没有发生定性的改变.从定量角度看,当温度上升时,幅频响应曲线向左偏转加剧,软弹簧特性增强;当温度下降时,曲线向左偏转程度减弱,软弹簧特性降低.假如悬索的垂跨比继续增加(如 $f=0.02$),与 $f=0.015$ 类似,温度变化仅会导致幅频响应曲线发生定量改变,此处不再赘述.

定性,图中虚线和实线分别为不稳定解和稳定解.由图 3(a)可知($f=0.006$),定性而言,当温度上升时,曲线会由原本的向右偏转变为向左偏转;从定量的角度而言,当温度下降时,共振响应的幅值急剧减小,当温度上升时,共振响应的幅值会明显增大.

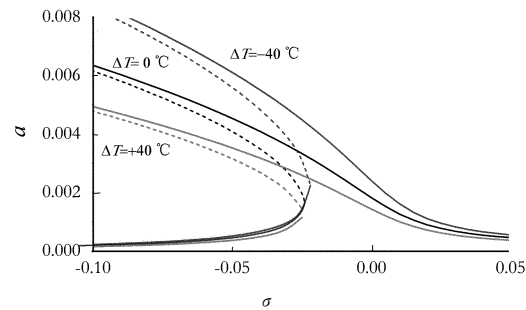
图 3(b)中($f=0.01$),当温度下降时,共振曲线几乎不发生偏转和跳跃,曲线为单值曲线.同理从图 3(c)不难看出,当悬索的垂跨比进一步增加时($f=0.015$),温度变化仅会导致共振响应发生定量改变,跳跃点的位置和共振响应幅值会发生明显改变.此时温度变化与幅频响应曲线向左偏转的程度呈正比,温度上升,软弹簧特性增强.



(a) $f=0.006$



(b) $f=0.01$

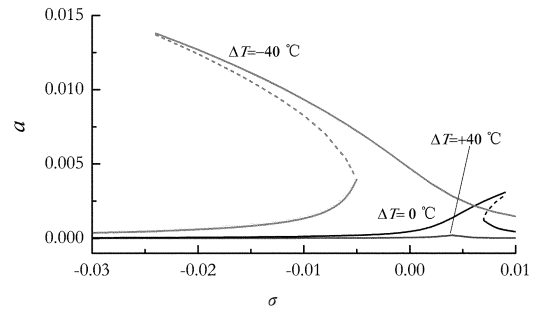


(c) $f=0.015$

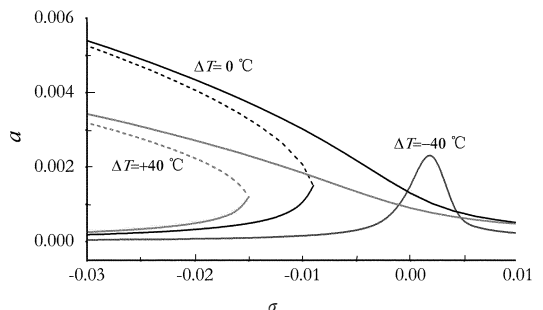
图 2 温度变化影响下悬索超谐波共振幅频响应曲线($\Omega \approx 1/2$)

Fig. 2 Frequency response curves of the super-harmonic resonances of the suspended cable with thermal effects($\Omega \approx 1/2$)

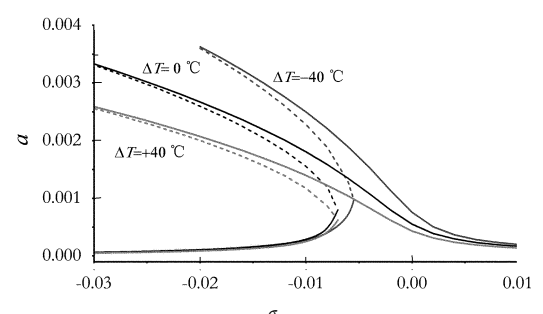
图 3 给出了当外激励频率 $\Omega \approx 1/3$ 时,考虑温度变化影响下,悬索超谐波共振时的幅频响应曲线.同理,通过研究方程奇点的性状决定稳态运动的稳



(a) $f=0.006$



(b) $f=0.01$



(c) $f=0.015$

图 3 温度变化影响下悬索超谐波共振幅频响应曲线($\Omega \approx 1/3$)

Fig. 3 Frequency response curves of the super-harmonic resonances of the suspended cable with thermal effects($\Omega \approx 1/3$)

图4描绘了当调谐参数 $\sigma = -0.05$ 时,悬索发生二阶超谐波共振的激励幅值和响应幅值的关系曲线与温度变化的关系. 稳态解的稳定性判断方法与之前一致,图中虚线表示不稳定解,实线表示稳定解,而最终系统的真实响应则取决于初始条件. 如图4所示,受温度变化的影响,激励-响应幅值曲线有可能存在多解或者单值. 具体而言,当 $f = 0.006$ 时,若悬索周围温度上升($\Delta T = +40^\circ\text{C}$),则曲线会出现跳跃现象,不再是单值曲线. 当 $f = 0.01$ 时,曲线在温度下降的情况下($\Delta T = -40^\circ\text{C}$),是单值曲线,在不考虑温度变化及温度上升时,曲线均为多值曲线,存在明显的跳跃现象. 当悬索垂跨比为0.015时,与幅频响应曲线类似,此时温度变化仅仅产生定

量的改变,曲线均会产生跳跃现象,存在多值区域. 从激励-响应幅值曲线亦可看出,温度变化会定性和定量地改变悬索的非线性振动特性. 从上述分析结果来看,无论是从定量还是定性的角度,在悬索非线性动力学分析中,温度变化是一个不容忽视且极其重要的影响因素.

4 结论

温度变化会直接影响悬索的张力及垂度,从而改变其非线性运动方程中线性项、平方和立方非线性项的系数大小. 无论是二阶还是三阶,悬索单模态非线性超谐波共振响应受温度变化影响明显. 当垂跨比较小时,一定程度的温度变化会导致其超谐波共振响应发生定性和定量的改变,即改变其幅频响应曲线的偏转方向和偏转程度,影响激励-响应幅值关系曲线的多值和单解性. 当垂跨比进一步增加时,温度变化对其共振响应会产生定量的影响,且温度的变化与幅频响应曲线向左偏转的程度呈正比,温度上升,软弹簧特性增加. 由于悬索存在初始张力,相同程度的升温和降温条件对其超谐波共振响应特性的影响不对称.

参考文献

- [1] XIA Y, CHEN B, WENG S, *et al.* Temperature effect on the vibration properties of civil structures; a literature review and case studies [J]. *Journal of Civil Structure Health Monitoring*, 2012, 2(1): 29-46.
- [2] 陈波, 郑瑾, 王建平. 桥梁结构温度效应研究进展[J]. *武汉理工大学学报*, 2010, 32(24): 79-83.
CHEN B, ZHENG J, WANG J P. State-of-the-art of the temperature effects of bridges[J]. *Journal of Wuhan University of Technology*, 2010, 32(24): 79-83. (In Chinese)
- [3] 李爱群, 丁幼亮, 王浩, 等. 桥梁健康监测海量数据分析与评估——“结构健康监测”研究进展[J]. *中国科学: 技术科学*, 2012, 42(8): 972-984.
LI A Q, DING Y L, WANG H, *et al.* Analysis and assessment of bridge health monitoring mass data-progress in research/ development of Structural Health Monitoring[J]. *Scientia Sinica (Technologica)*, 2012, 42(8): 972-984. (In Chinese)
- [4] 康厚军, 郭铁丁, 赵跃宇, 等. 大跨度斜拉桥非线性振动模型与理论研究进展[J]. *力学学报*, 2016, 48(3): 519-535.
KANG H J, GUO T D, ZHAO Y Y, *et al.* Review on nonlinear vibration and modeling of large span cable-stayed bridge [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(3): 519-535. (In Chinese)
- [5] REGA G. Nonlinear vibrations of suspended cable - Part I;

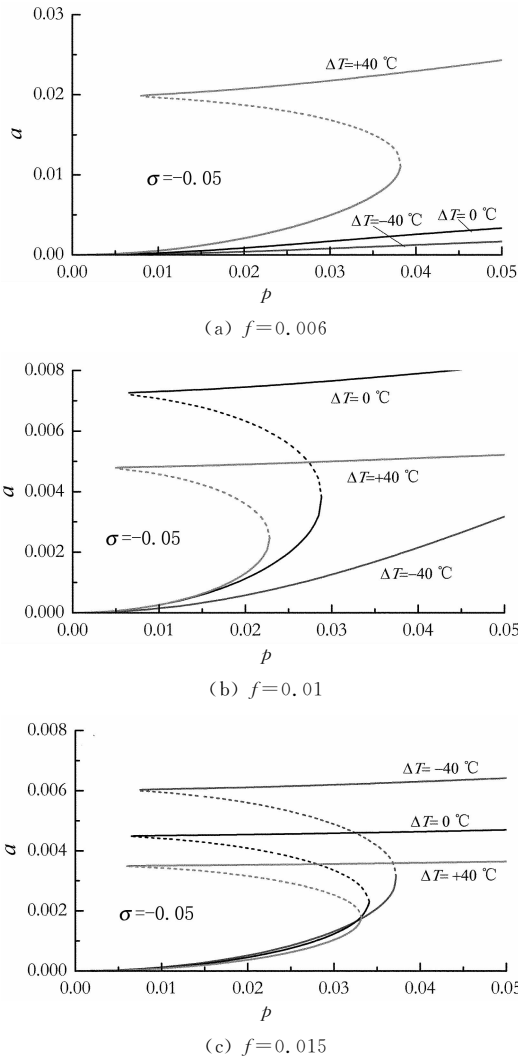


图4 温度变化影响下悬索超谐波共振激励-响应幅值关系曲线($\Omega \approx 1/2$)

Fig. 4 Relationship between the excitation and response amplitudes of the super-harmonic resonances of the suspended cable with thermal effects($\Omega \approx 1/2$)

- modeling and analysis[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2004, 57(6): 443–478.
- [6] 康厚军, 解维东, 郭铁丁. CFRP 索斜拉梁面内自由振动建模及参数分析[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2016, 43(9): 18–25.
- KANG H J, XIE W D, GUO T D. Modeling and parameters analysis on in-plane free vibration of cable stayed beam [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2016, 43(9): 18–25. (In Chinese)
- [7] 康厚军, 赵跃宇, 朱志辉, 等. 强迫激励下 CFRP 斜拉索面内分叉特性[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2014, 41(9): 8–13.
- KANG H J, ZHAO Y Y, ZHU Z H, *et al.* In-plane bifurcation behavior of inclined CFRP cable subject to external excitation [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2014, 41(9): 8–13. (In Chinese)
- [8] REGA G. Nonlinear vibrations of suspended cable—Part II: deterministic phenomena [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2004, 57(6): 479–514.
- [9] NAYFEH A H, MOOK D T. *Nonlinear oscillations* [M]. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 1979: 198–201.
- [10] IRVINE H M. *Cable structures* [M]. Cambridge, NJ: The MIT Press, 1981: 82–83.
- [11] 杨志安, 刘鹏飞, 席晓燕. 温度场中输电线在谐波力作用下的 1/3 次亚谐波共振研究[J]. *工程力学*, 2007, 24(8): 182–187.
- YANG Z A, LIU P F, XI X Y. 1/3 sub-harmonic resonance of suspended cable subjected to harmonic excitation in temperature field[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(8): 182–187. (In Chinese)
- [12] LEPIDI M, GATTULLI V. Static and dynamic response of elastic suspended cables with thermal effects [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, 49: 1103–1116.
- [13] TREYSEDE F. Free vibrations of cables under thermal stress [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 327(1): 1–8.
- [14] 汪峰, 陈福青, 文晓旭, 等. 考虑温度影响的斜拉索参数振动模型及响应分析[J]. *重庆交通大学学报(自然科学版)*, 2016, 35(2): 1–5.
- WANG F, CHEN F Q, WEN X X, *et al.* Analysis of cable parametric vibration model and response with consideration of temperature effect [J]. *Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science)*, 2016, 35(2): 1–5. (In Chinese)
- [15] 赵珧冰, 孙测世, 彭剑, 等. 温度变化对拉索频率与索力的影响[J]. *应用力学学报*, 2013, 30(6): 904–908.
- ZHAO Y B, SUN C S, PENG J, *et al.* The effects of temperature changes on the frequencies and tension forces of cable [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2013, 30(6): 904–908. (In Chinese)
- [16] 赵珧冰, 孙测世, 彭剑, 等. 不同初拉力拉索对温度变化的敏感性分析[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2014, 45(5): 1680–1685.
- ZHAO Y B, SUN C S, PENG J, *et al.* Sensitivity analysis of different initial tension forces of suspended cable to temperature changes [J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2014, 45(5): 1680–1685. (In Chinese)
- [17] 金波, 赵珧冰, 张定方, 等. 温度变化对悬索非线性自由振动特性影响[J]. *应用力学学报*, 2017, 34(1): 64–68.
- JIN B, ZHAO Y B, ZHANG D F, *et al.* Temperature effects on nonlinear free vibration of the suspended cable [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2017, 34(1): 64–68. (In Chinese)
- [18] 赵珧冰, 彭剑. 温度变化对悬索主共振响应影响分析[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(15): 240–244.
- ZHAO Y B, PENG J. Effects of temperature changes on primary resonances of suspended cables [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(15): 240–244. (In Chinese)
- [19] 赵珧冰, 黄超辉, 金波. 悬索面内次谐波共振受温度效应影响研究[J]. *振动与冲击*, 2018, 37(6): 1–6.
- ZHAO Y B, HUANG C H, JIN B. Investigation of temperature effects on the in-plane sub-harmonic resonances of suspended cables [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(6): 1–6. (In Chinese)
- [20] ZHAO Y B, WANG Z Q, ZHANG X Y, *et al.* Effects of temperature variation of a cable stayed beam [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2017, 17(10): 1–18.
- [21] WANG Z W, LI T J. Nonlinear dynamic analysis of parametrically excited space cable-beam structures due to thermal loads [J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 83: 50–61.
- [22] BENEDETTINI F, REGA G. Planar nonlinear oscillations of elastic cables under super-harmonic resonance conditions [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, 132(3): 353–366.