

基于 Udwadia-Kalaba 理论的 悬架零部件动态载荷计算方法

胡三宝^{1,2}, 吴攀^{1,2†}, 王潮^{1,2}

(1. 武汉理工大学 现代汽车零部件技术湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430070;

2. 汽车零部件技术湖北省协同创新中心, 湖北 武汉 430070)

摘要:以轮心六分力作为输入,研究了基于 Udwadia-Kalaba 理论的悬架零部件动态载荷计算方法.以五连杆后悬架作为建模对象,建立了悬架系统动力学模型,并将系统总约束力进行分解,得到各部件所受动态载荷的解析表达式.与传统拉格朗日建模方法相比,该方法无需借助拉格朗日乘子,降低了建模复杂程度.为验证方法的正确性,将数值计算结果与传统建模软件 Adams/Car 仿真结果进行对比,结果表明:该方法准确、高效,计算所得动态载荷与 Adams/Car 仿真结果均具有较好的吻合性;最后将该方法应用到实车试验中,进行了某 SUV 后悬架的动态载荷预测.

关键词:悬架零部件;Udwadia-Kalaba 理论;六分力;动态载荷;载荷预测

中图分类号:TH242

文献标志码:A

A Method for Calculating Dynamic Load of Suspension Part Based on Udwadia-Kalaba Theory

HU Sanbao^{1,2}, WU Pan^{1,2†}, WANG Chao^{1,2}

(1. Hubei Key Laboratory of Advanced Technology of Automotive Components, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China;

2. Hubei Collaborative Center for Automotive Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract: Based on Udwadia-Kalaba theory, a method for calculating the dynamic load of suspension part was studied by taking the six-component force of wheel center as the input. Taking the five-rod rear suspension as the modeling object, the dynamic model of the suspension system was established, and the analytical expression of the load at each part was obtained with the decomposition of the total binding force. Compared with the traditional Lagrange modeling method, the method does not need the Lagrange multiplier and reduces the complexity of modeling. In order to verify the correctness of the method, the numerical results were compared with the simulation results of the traditional modeling software Adams/Car. The analysis result shows that the proposed method is accurate and efficient, and the calculated dynamic loads are in good agreement with the Adams/Car simulation results. Finally, the method was applied to the actual vehicle test, and the load prediction for the rear suspension of a SUV was carried out.

Key words: suspension part; Udwadia-Kalaba theory; six-component force; dynamic load; load prediction

* 收稿日期:2018-03-21

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51305314), National Natural Science Foundation of China(51305314)

作者简介:胡三宝(1979—),男,湖北随州人,武汉理工大学副教授,博士

† 通讯联系人, E-mail: 1048904732@qq.com

汽车悬架的主要功用是传递来自车轮的力并承受车身的质量,在悬架的设计开发中,耐久性评价是非常重要的环节,而载荷则是进行悬架零部件耐久性评价的核心基础,可为悬架的耐久性试验和评价提供依据^[1]。

目前为获取悬架零部件载荷,常用的方法是将实际采集的载荷信号在试验台架上迭代出驱动信号,然后通过作动器加载到相应位置来模拟道路试验^[2]。伴随着轮心六分力测量技术的发展成熟,在采集实车道路载荷信号时,可以较为准确地记录下行驶过程中轮心的 6 个分力,不必考虑轮胎的复杂非线性特性,从而可以获得更精确的当量关系。文献[3]采用 4 个车轮六分力传感器、加速度传感器和应变传感器,在海南试验场及周边实际道路上采集某参考车型整车主要结构动态载荷信号。但这种完全依靠试验采集结构载荷的方法成本相对比较高,伴随着计算机技术的快速发展,试验与仿真相结合已经成为获取悬架结构载荷的重要研究手段。

文献[4]建立了副车架与悬架系统的刚柔耦合动力学模型,利用试验所测的 4 个车轮的轮心六分力进行加载得到副车架结合部位的载荷时域信号;文献[5]建立了客车前后悬架模型,利用轮心六分力作为输入提取了悬架与车身连接点处的动态载荷;文献[6]采用多体动力学和有限元联合仿真的方法,建立整车刚柔耦合动力学模型,将仿真获得的载荷时间历程作为随机载荷谱进行了托举机构的疲劳寿命分析。文献[7]建立了整车虚拟样机,根据真实六分力实现虚拟样机重现实际道路的过程,获取了车身及零部件的疲劳载荷。上述试验与仿真相结合的载荷提取方法,均需依托多体动力学软件 Adams 建立相应仿真模型,前期需要进行大量的建模工作,计算结果的正确性高度依赖模型的准确性,对使用者的经验有较高要求。且 Adams 在研究动力学问题时是以含拉格朗日乘子的第一类拉氏方程作为内置建模方法^[8],但在实际数学建模过程中,拉格朗日乘子不容易确定,需要考虑所有自由度之间的运动关系,建模步骤较为繁琐。

Udwadia-Kalaba 理论是近 20 年来分析力学领域的一个重要成果,该方法的最大特点是将受约束机械系统的约束关系融入到动力学方程中,在不出现在拉格朗日乘子的条件下,探讨了理想约束和非理想约束条件下约束力的解析表达式^[9],成为分析力学中的一个重要突破。但该理论并未得到太多的关注,其主要应用领域集中在卫星系统的动力学建模

及控制中,而在汽车动力学建模领域的应用很少。目前在国内有合肥工业大学应用该理论进行了重型汽车及自动离合器的简化建模与控制研究^[10-11],取得了较好的效果。

本文将 Udwadia-Kalaba 理论应用到悬架系统建模中,以轮心六分力作为输入信号,建立五连杆后悬架系统动力学模型,阐述悬架零部件动态载荷的计算方法。

1 Udwadia-Kalaba 理论

考虑一受约束机械系统,利用 Udwadia-Kalaba 理论对该系统进行建模,其过程分为 3 个步骤:

1) 在无约束条件下,建立该系统 n 个自由度的动力学方程,用广义坐标向量 $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ 来表示系统 n 维广义坐标,则广义速度、加速度向量为 $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$ 、 $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$,得到如下方程:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为系统正定质量(惯性)矩阵; $\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统广义力,包括重力、外界输入力和离心力,此步骤可采用拉格朗日法或牛顿力学法实现。

2) 考虑系统内有 m 个约束,约束方程为:

$$\mathbf{C}_i(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

对上式在时域内求导,得到约束的二阶矩阵形式:

$$\mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为系统约束矩阵; $\mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^m$ 为 m 维列向量。

3) 将约束添加到无约束方程中,约束对系统的作用体现在约束力上,于是,含约束的机械系统 Udwadia-Kalaba 动力学方程表示为:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + \mathbf{Q}_c(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \quad (4)$$

式中: $\mathbf{Q}_c(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ 为系统附加力即约束力,包含理想约束力和非理想约束力。

根据 Udwadia-Kalaba 理论,系统理想约束力表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ic}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) &= \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{D}^+ (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}) \\ \mathbf{D} &= \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1/2} \end{aligned} \quad (5)$$

非理想约束力表示为:

$$\mathbf{Q}_{nc}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{M}^{1/2} (\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D}) \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{c} \quad (6)$$

式中: $+$ 代表广义逆; $\mathbf{I}$ 为单位矩阵; 向量 $\mathbf{c}$ 为补偿因子,该方程可由高斯定理、达朗贝尔原理推导得

出^[12],结合上式,则得到约束系统的动力学方程:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{D}^+ \mathbf{x} \\ (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}) + \mathbf{M}^{1/2} (\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D}) \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{c} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$\mathbf{c}=0$ 时,即为理想约束系统动力学方程。

2 悬架动力学建模

悬架是典型的受约束复杂机械系统,以五连杆后悬架为例,结合 Udwadia-Kalaba 理论和多体动力学相关理论,进行悬架系统动力学建模。

2.1 五连杆后悬架模型

图 1 所示为不含轮胎的五连杆后悬架系统简化模型,模型包括各连杆、减振器、弹簧、车身及轮架,忽略各铰点处的橡胶衬套,连杆与轮架和车身之间均为球铰连接。

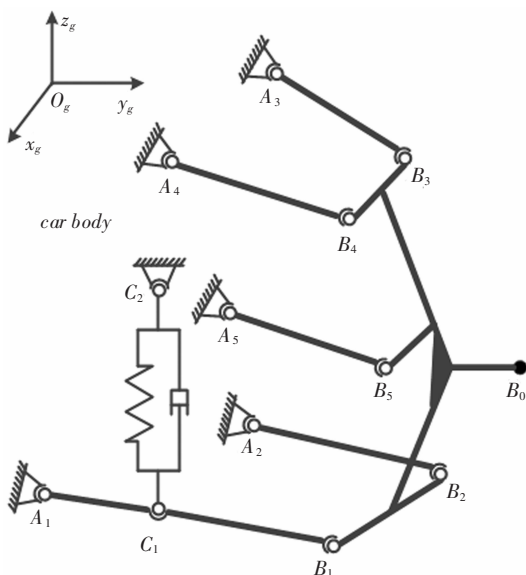


图 1 五连杆后悬架简图

Fig.1 Schematic diagram of five rod rear suspension

图 1 中: A_i, B_i 为连杆与车身及车轮托架的连接点; C_1, C_2 为减振器弹簧与悬架及车身的连接点; $O_g - x_g y_g z_g$ 为整车坐标系,记为 $\{g\}$; B_0 为车轮中心点。

在建立系统动力学模型时,做了如下假设和简化^[13]:

1) 将各连杆及轮架均视为刚体,不存在变形,且车身保持固定;

2) 减振器和弹簧视为系统力元,建模中不考虑其重力的影响。

为方便后续建模说明,定义各连杆及轮架为刚体 $i (i=1 \sim 6)$,在各刚体质心处以其惯量主轴为坐标轴建立随体坐标系 $\{i\}$,并定义以下矢量:

${}^g \mathbf{r}_{A_i}$: 铰点 A_i 在坐标系 $\{g\}$ 中的位置矢量;

${}^g \mathbf{r}_{A_i}, {}^g \mathbf{r}_{B_i}$: 铰点 A_i, B_i 在坐标系 $\{i\}$ 中的位置矢量;

${}^g \mathbf{r}_{B_i}$: 铰点 B_i 在坐标系 $\{g\}$ 中的位置矢量。

2.2 无约束系统动力学建模

根据 Udwadia-Kalaba 理论建模思想,解除各刚体之间的球铰约束,利用拉格朗日方程建立系统的动力学方程,其基本形式为:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V^{(g)}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F} \quad (8)$$

式中: E 为系统的动能; $V^{(g)}$ 为系统重力势能; $\mathbf{F}$ 为系统所受广义主动力。

2.2.1 系统的总动能

取整车坐标系 $\{g\}$ 作为广义坐标系,建立刚体 i 的广义坐标:

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \varphi_i \end{bmatrix}, i = 1 \sim 6$$

式中:

$$\mathbf{x}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T, \varphi_i = [\alpha_i \ \beta_i \ \gamma_i]^T$$

x_i, y_i, z_i 为刚体 i 质心的广义坐标; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 为刚体 i 相对坐标系 $\{g\}$ 的广义姿态角,称为侧倾-横摆-俯仰角,定义 ${}^i_g \mathbf{R}$ 为刚体 i 由坐标系 $\{i\}$ 到 $\{g\}$ 的旋转姿态变换矩阵,则有:

$${}^i_g \mathbf{R} = \mathbf{Z}(\gamma_i) \mathbf{Y}(\beta_i) \mathbf{X}(\alpha_i) \quad (9)$$

$\mathbf{Z}(\gamma_i), \mathbf{Y}(\beta_i), \mathbf{X}(\alpha_i)$ 分别为绕 z, y, x 轴转动的姿态变换矩阵。

则刚体 i 的齐次变换矩阵为:

$${}^i_g \mathbf{B} = \begin{bmatrix} {}^i_g \mathbf{R} & \mathbf{x}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

刚体运动可分解为质量集中在质心的平移运动与绕质心的旋转运动,因此刚体的动能表示为:

$$E_i = \frac{1}{2} \text{trace} \{ {}^i_g \dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{H}_i {}^i_g \dot{\mathbf{B}} \} \quad (11)$$

式中:

$$\mathbf{H} = \text{diag}(h_1, h_2, h_3, m_i), h_1 = \frac{1}{2} (-J_x + J_y + J_z)$$

$$h_2 = \frac{1}{2} (J_x - J_y + J_z), h_3 = \frac{1}{2} (J_x + J_y - J_z)$$

(12)

J_x, J_y, J_z 为刚体 i 在其局部坐标中的转动惯量; m_i 为刚体质量,则系统的总动能为:

$$E = \sum_{i=1}^6 E_i \quad (13)$$

由式(11)求偏导,参考文献[14]中的变换,得到:

$$\varepsilon_q^i(E) = \frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} = \mathbf{M}_i \ddot{q}_i + \mathbf{e}_i \quad (14)$$

式中: $\mathbf{M}_i$ 为刚体 i 的 6×6 正定质量矩阵; $\mathbf{e}_i$ 为一组列向量. 表 1 及表 2 分别列出了 $\mathbf{M}_i$ 及 $\mathbf{e}_i$ 的各非零元.

表 1 矩阵 $\mathbf{M}_i$ 的非零元

Tab.1 Nonzero elements of matrix $\mathbf{M}_i$

k	l	$m_{i,k,l}$
1	1	
2	2	m_i
3	3	
4	4	${}^i h_2 + {}^i h_3$
5	5	${}^i h_1 + {}^i h_2 s_{i,1}^2 + {}^i h_3 c_{i,1}^2$
6	7	${}^i h_1 c_{i,2}^2 + {}^i h_2 (s_{i,1}^2 s_{i,2}^2 + c_{i,1}^2) + {}^i h_3 (c_{i,1}^2 s_{i,2}^2 + s_{i,1}^2)$
4	6	$-({}^i h_2 + {}^i h_3) s_{i,2}$
6	4	
5	6	$({}^i h_3 - {}^i h_2) s_{i,1} c_{i,1} c_{i,2}$
6	5	

表 2 向量 $\mathbf{e}_i$ 的非零元

Tab.2 Nonzero elements of vector $\mathbf{e}_i$

k	$e_{i,k,l}$
4	$-2({}^i h_2 s_{i,1}^2 + {}^i h_3 c_{i,1}^2) \dot{\beta}_i + ({}^i h_3 - {}^i h_2) s_{i,1} c_{i,1} (\dot{\beta}_i^2 - \dot{\gamma}_i^2 c_{i,2}^2)$
5	$2\dot{\alpha}_i [({}^i h_2 - {}^i h_3) \dot{\beta}_i s_{i,1} c_{i,2}] + ({}^i h_2 s_{i,1}^2 + {}^i h_3 c_{i,1}^2) \dot{\gamma}_i c_{i,2} + \dot{\gamma}_i^2 ({}^i h_1 - {}^i h_2 s_{i,1} - {}^i h_3 c_{i,1}) s_{i,1} c_{i,2}$
6	$2\dot{\alpha}_i [({}^i h_3 - {}^i h_2) \dot{\gamma}_i s_{i,1} c_{i,1} c_{i,2} - ({}^i h_2 c_{i,1}^2 + {}^i h_3 s_{i,1}^2) \dot{\beta}_i] c_{i,2} + \dot{\beta}_i^2 ({}^i h_2 - {}^i h_3) s_{i,1} c_{i,1} s_{i,2} + 2\dot{\beta}_i \dot{\gamma}_i (-{}^i h_1 + {}^i h_2 s_{i,1}^2 + {}^i h_3 c_{i,1}^2) s_{i,1} c_{i,2}$

注: $s_{i,1} = \sin \alpha_i, s_{i,2} = \sin \beta_i, s_{i,3} = \sin \gamma_i,$

$c_{i,1} = \cos \alpha_i, c_{i,2} = \cos \beta_i, c_{i,3} = \cos \gamma_i.$

2.2.2 系统的总势能

系统的总势能为各刚体重力势能之和, 根据重力势能的定义, 表示为:

$$V^{(g)} = \sum_{i=1}^6 V_i^{(g)} = \sum_{i=1}^6 g \theta_3 m_i x_i \quad (15)$$

式中: $\theta_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$; g 为重力加速度, 则系统所受重力为:

$$\frac{\partial V^{(g)}}{\partial \mathbf{q}_i} = g[0 \ 0 \ m_i \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (16)$$

2.2.3 系统广义主动力

以轮心六分力作为输入, 并将弹簧力和阻尼力

作为系统广义主动力, 具体计算方法如下:

1) 弹簧力

弹簧的下安装点 C_1 在刚体 1 局部坐标系 $\{1\}$ 中的位置矢量为 ${}^1 \mathbf{r}_{C_1}$, 由式(10)将其向广义坐标系 $\{g\}$ 做齐次变换, 得到点 C_1 在广义坐标系中的位置矢量:

$${}^g \mathbf{r}_{C_1} = \mathbf{x}_1 + {}^1_g \mathbf{R}^1 \mathbf{r}_{C_1} \quad (17)$$

令弹簧在安装时的预压缩量为 d_0 , 则任一状态下弹簧的总变形量为:

$$\Delta d = d_0 + |{}^g \mathbf{r}_{C_1 C_2}^0| - |{}^g \mathbf{r}_{C_1 C_2}| \quad (18)$$

式中: ${}^g \mathbf{r}_{C_1 C_2}^0$ 为初始时刻弹簧上下安装点的方向向量; ${}^g \mathbf{r}_{C_1 C_2}$ 为新时刻的方向向量.

根据弹簧的非线性力-位移特性, 设在变变量 Δd 时弹簧刚度系数为 k , 则弹簧对刚体 1 的弹性力为 F_s :

$$F_s = k \cdot \Delta d \cdot \mathbf{e}_{C_1 C_2} \quad (19)$$

式中: $\mathbf{e}_{C_1 C_2}$ 为沿弹簧轴线的单位向量.

2) 减振器阻尼力

在悬架运动过程中, 由式(17)对时间求导, 得到减振器下安装点 C_1 的速度矢量:

$$\dot{{}^g \mathbf{r}}_{C_1} = \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_1 + {}^1_g \mathbf{R}^1 \mathbf{r}_{C_1}) = \dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\varphi}_1 \times {}^1_g \mathbf{R}^1 \mathbf{r}_{C_1} \quad (20)$$

则该速度矢量在减振器轴线方向的分量为:

$$\mathbf{v}_d = \dot{{}^g \mathbf{r}}_{C_1} \cdot \mathbf{e}_{C_1 C_2} \quad (21)$$

根据减振器的非线性力-速度特性, 令 f 为减振器在该速度下对应的阻尼系数, 则减振器对刚体 1 产生的阻尼力 F_d 为:

$$\mathbf{F}_d = -f \cdot \mathbf{v}_d \quad (22)$$

因此, 刚体 1 所受广义主动力为:

$$\mathbf{F}_1 = \left(\frac{\partial {}^g \mathbf{r}_{C_1}}{\partial \mathbf{q}_1} \right)^T (\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_d) \quad (23)$$

同理, 对于轮架, 轮心点 B_0 在坐标系 $\{g\}$ 中的位置矢量为:

$${}^g \mathbf{r}_{B_0} = \mathbf{x}_6 + {}^6_g \mathbf{R}^6 \mathbf{r}_{B_0} \quad (24)$$

作用于轮架的轮心六分力分别为 $\mathbf{F}_{B_0}$ 、 $\mathbf{M}_{B_0}$, 则轮架所受广义主动力为:

$$\mathbf{F}_6 = \left(\frac{\partial {}^g \mathbf{r}_{B_0}}{\partial \mathbf{q}_6} \right)^T \mathbf{F}_{B_0} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_{B_0} \end{bmatrix} \quad (25)$$

刚体 2、3、4、5 均无广义主动力的作用, 则有:

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_5 = 0 \quad (26)$$

综上所述, 无约束系统动力学方程为:

$$\mathbf{M}_N^C \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (27)$$

式中:

$$\mathbf{M}_N^C = \text{diag}(\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_6), \mathbf{Q} = \mathbf{F} - \mathbf{e}_N^C - \frac{\partial V^{(g)}}{\partial \mathbf{q}}$$

$$\frac{\partial V^{(g)}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V^{(g)}}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V^{(g)}}{\partial q_6} \end{bmatrix}, \mathbf{e}_N^C = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_6 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_6 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_6 \end{bmatrix}$$

2.3 系统约束方程

根据五连杆后悬架的运动特性,该系统具有保持车轮上下跳动的自由度,系统共6个活动构件(弹簧及减振器视为系统力元,不计入自由度计算),各构件为球铰连接,共约束30个自由度,同时减去球铰引起的连杆绕自身轴线的转动自由度,共约束5个自由度,则系统的总自由度为1^[15],因此系统的约束方程如下。

车身侧铰点 $A_i (i=1 \sim 6)$ 满足位移约束:

$$(x_i + {}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{A_i}) - {}^g \mathbf{r}_{A_i} = 0 \quad (28)$$

轮架侧铰点 B_i 满足相对位移约束:

$$(x_i + {}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{B_i}) - (x_6 + {}^6_g \mathbf{R}^6 \mathbf{r}_{B_i}) = 0 \quad (29)$$

各连杆满足自转约束:

$$\dot{\varphi}_i \cdot {}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{A_{B_i}} = 0 \quad (30)$$

对上述约束方程在时域内求导,变为约束的二阶形式:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}}_i + \ddot{\varphi}_i \times {}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{A_i} + \dot{\varphi}_i \times (\dot{\varphi}_i \times {}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{A_i}) = 0 \\ \ddot{\mathbf{x}}_i + \ddot{\varphi}_i \times {}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{B_i} + \dot{\varphi}_i \times (\dot{\varphi}_i \times {}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{B_i}) - \\ (\ddot{\mathbf{x}}_6 + \ddot{\varphi}_6 \times {}^6_g \mathbf{R}^6 \mathbf{r}_{B_i} + \dot{\varphi}_6 \times (\dot{\varphi}_6 \times {}^6_g \mathbf{R}^6 \mathbf{r}_{B_i})) = 0 \\ \ddot{\varphi}_i \cdot {}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{A_{B_i}} + \dot{\varphi}_i \cdot (\dot{\varphi}_i \times {}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{A_{B_i}}) = 0 \end{cases} \quad (31)$$

2.4 系统约束力分解

将约束方程(31)写成矩阵形式,即可得到如式(3)形式的约束矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{35 \times 36}$ 和向量 $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{35}$,结合以上各式,则五连杆悬架系统的动力学方程为:

$$\mathbf{M}_N^C \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{M}_N^{C1/2} (\mathbf{A} \mathbf{M}_N^{C-1/2})^T (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{M}_N^{C-1} \mathbf{Q}) \quad (32)$$

式(32)为36维二阶微分方程组,以轮心六分力作为输入,求解此方程组即可得到悬架的运动状态以及任意时刻作用于各刚体广义坐标上的系统总约束力 $\mathbf{Q}_c$,对总约束力 $\mathbf{Q}_c$ 进行分解,即可得到各铰点处的载荷。

设铰点 A_i, B_i 处的约束力分别为 $\mathbf{F}_{A_i}, \mathbf{F}_{B_i}$, 同时引入比例因子 f_i , 则约束连杆自转的约束力矩表示为 $f_i ({}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{A_{B_i}})$, 于是连杆 i 所受总约束力 $\mathbf{Q}_c$ 表示为:

$$\left(\frac{\partial (x_i + {}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{A_i})}{\partial q_i} \right)^T \mathbf{F}_{A_i} + \left(\frac{\partial (x_i + {}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{B_i})}{\partial q_i} \right)^T \mathbf{F}_{B_i} + \left(\begin{matrix} 0 \\ f_i ({}^i_g \mathbf{R}^i \mathbf{r}_{A_{B_i}}) \end{matrix} \right) = {}^i \mathbf{Q}_c, i = 1 \sim 5 \quad (33)$$

作用于轮架的总约束力表示为:

$$- \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial (x_6 + {}^6_g \mathbf{R}^6 \mathbf{r}_{B_i})}{\partial q_6} \right)^T \mathbf{F}_{B_i} = {}^6 \mathbf{Q}_c \quad (34)$$

将式(33)、(34)写成矩阵形式:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{A_1} \\ \mathbf{F}_{B_1} \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_c \quad (35)$$

$\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^{36 \times 35}$ 为各铰点的雅克比矩阵,利用最小二乘法即可求得各铰点处的约束力及连杆的约束力矩比例因子,从而得到各零部件结构载荷。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{A_1} \\ \mathbf{F}_{B_1} \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = (\mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{J}(\mathbf{q}))^{-1} (\mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{Q}_c) \quad (36)$$

3 数值仿真

以某 SUV 五连杆后悬架作为建模实例,表3为弹簧非线性力-位移特性及减振器力-速度特性,表4表5分别为该悬架在整车坐标系中各铰点的位置及各刚体的质量参数。

表3 弹簧及减振器特性

Tab.3 Spring and damper characteristics

弹簧力学特性		减振器力学特性	
$\Delta d/\text{m}$	F/N	$V/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	F/N
-0.11	-10 850	-0.5	-1 700
-0.1	-8 000	-0.4	-1 300
-0.08	-5 760	-0.2	-410
-0.02	-1 440	-0.075	-112.5
0	0	0	0
0.02	1 440	0.075	112.5
0.08	5 760	0.2	410
0.1	8 000	0.4	1 300
0.11	10 850	0.5	1 700

表 4 硬点参数

Tab.4 Hard point parameters

铰点	X/m	Y/m	Z/m
A_1	1.441	-0.512	1.005
A_2	2.010	-0.304	0.955
A_3	2.170	-0.431	1.116
A_4	1.990	-0.472	1.133
A_5	2.253	-0.285	0.969
B_0	2.140	-0.768	1.065
B_1	2.040	-0.731	0.936
B_2	2.016	-0.698	0.988
B_3	2.050	-0.733	1.190
B_4	1.965	-0.741	1.190
B_5	2.159	-0.724	1.019
C_1	1.890	-0.581	0.931
C_2	1.898	-0.544	1.326

表 5 刚体质量参数

Tab.5 Rigid body mass parameters

刚体	m/kg	$J_x/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$J_y/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$J_z/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$
1	15	$9.61\text{e-}2$	$5.30\text{e-}1$	$6.14\text{e-}2$
2	2.2	$5.42\text{e-}2$	$6.49\text{e-}2$	$4.13\text{e-}3$
3	1.8	$4.76\text{e-}2$	$5.77\text{e-}2$	$2.83\text{e-}3$
4	1.8	$4.76\text{e-}2$	$5.77\text{e-}2$	$2.83\text{e-}3$
5	2.8	$7.12\text{e-}2$	$6.23\text{e-}2$	$5.25\text{e-}3$
6	20	$2.51\text{e-}1$	$6.52\text{e-}1$	$2.81\text{e-}1$

基于以上参数,在 Adams/Car 中建立该悬架的多体模型,定义为模型 A,在 Matlab 中建立本文所述动力学模型,定义为模型 M.对模型 A 进行随机路面的动态仿真,获取轮心六分力数据,作为模型 M 的输入.

以模拟 D 级随机路面为例,给定模型 M 初始条件: $\mathbf{q}_0$ 为模型初始广义坐标, $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$,仿真步长取 0.01 s,时间为 10 s,模型 M 采用龙格-库塔积分法,求解过程中根据式(18)、式(21)计算弹簧的变形量及减振器速度,并按表 3 选择刚度及阻尼系数.两种模型所得 B_i 铰点处的三向动态力的对比结果分别如图 2~图 7 所示,同时给出了 B_i 铰点 X 方向动态力的计算误差,如图 8 所示.

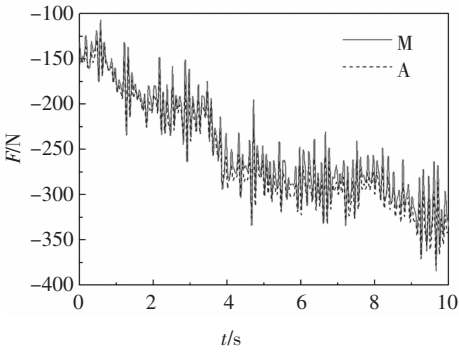


图 2 铰点 X 向动态力

Fig.2 Dynamic force of point in X direction

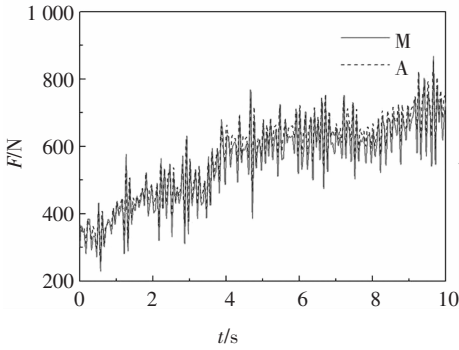


图 3 铰点 Y 向动态力

Fig.3 Dynamic force of point in Y direction

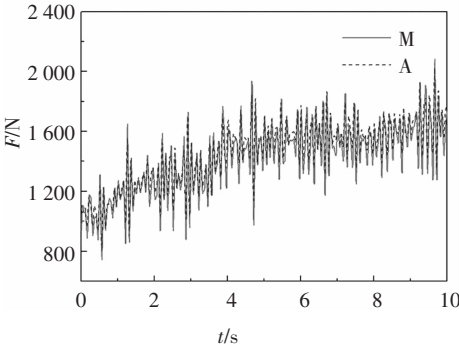


图 4 铰点 Z 向动态力

Fig.4 Dynamic force of point in Z direction

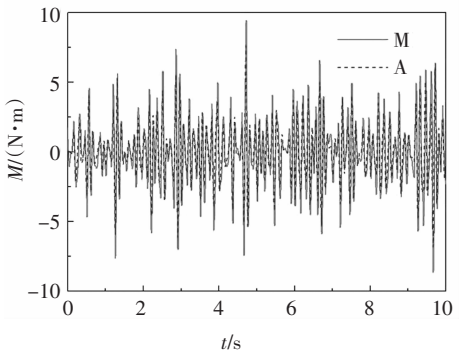


图 5 连杆 1 绕 X 轴动态力矩

Fig.5 Dynamic moment of rod 1 around X axis

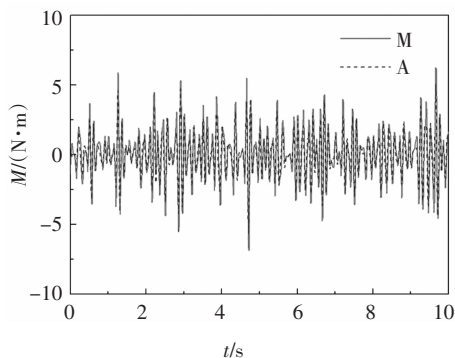


图6 连杆1绕Y轴动态力矩

Fig.6 Dynamic moment of rod 1 around Y axis

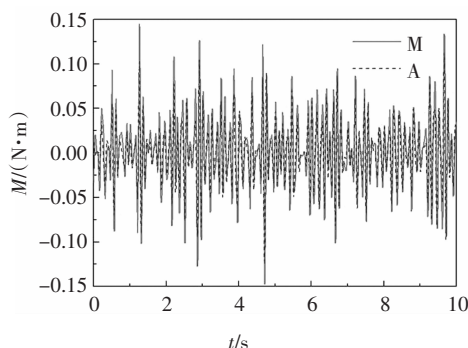


图7 连杆1绕Z轴动态力矩

Fig.7 Dynamic moment of rod 1 around Z axis

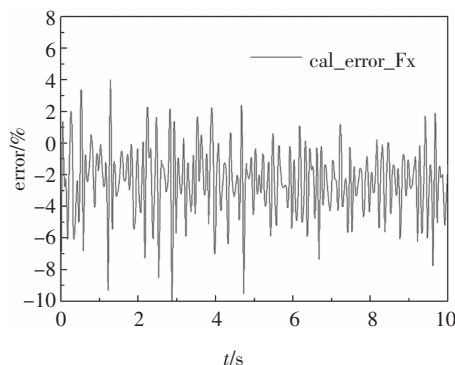


图8 计算误差

Fig.8 Calculation error

由仿真结果可知,两种模型计算所得动态载荷在变化趋势上比较吻合,计算误差基本在5%以内,但部分时刻出现了最大约10%的误差,这是由于两种模型的计算初值存在一定差异,以及所采用积分器不同而造成的。

因此,可以证明本文所述载荷计算方法与传统建模方法取得了相似的效果,且在同样的仿真步长及仿真时间下,模型A仿真所需时长为6.85 s,模型

M为6.6 s,耗时相近,证明该方法准确、高效,有效地克服了传统建模方法需借助拉格朗日乘子、建模过程复杂的缺点。

4 试验及应用

将该方法应用于实车试验中,通过轮心六分力传感器和 LMS Testlab 软件,获取在实际道路行驶中该 SUV 后轮轮心六分力数据,进行后悬架零部件的逆向载荷预测。以汽车低速过减速带及直行制动两种工况为例,传感器的布置如图9所示,传感器提取的部分轮心六分力数据如图10~图13所示。



图9 轮心六分力仪

Fig.9 The six-component force meter

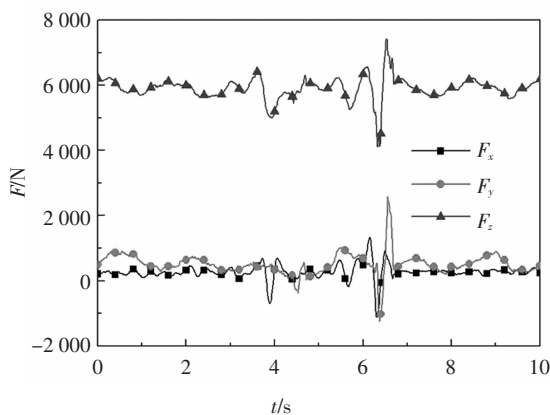


图10 过减速带轮心力

Fig.10 Force of the wheel center when passing through the reducer

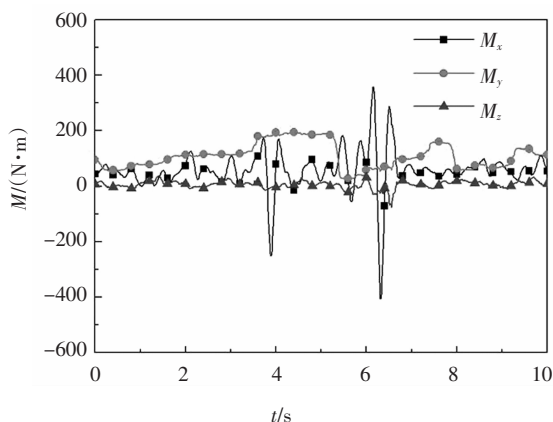


图 11 过减速带轮心力矩

Fig.11 Moment of the wheel center when passing through the reducer

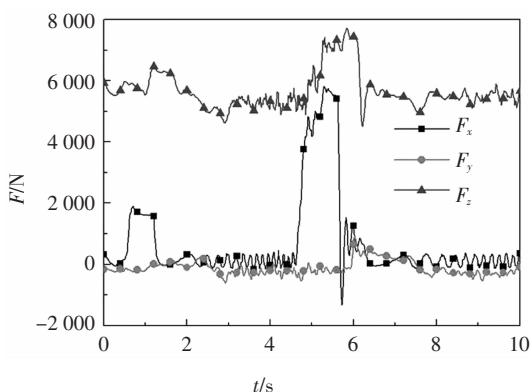


图 12 直行制动轮心三向力

Fig.12 Force of the wheel center when direct braking

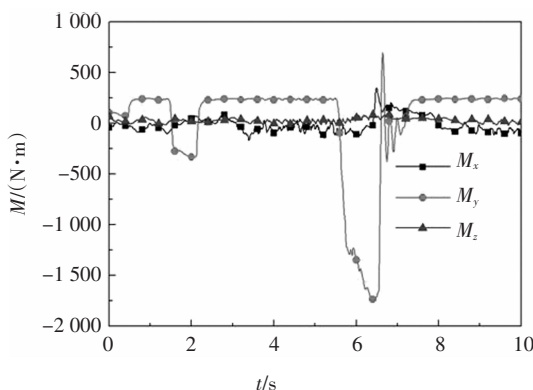
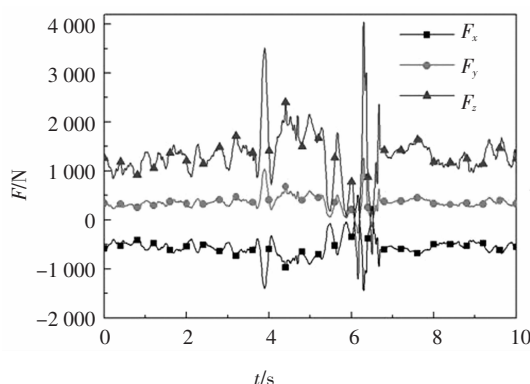
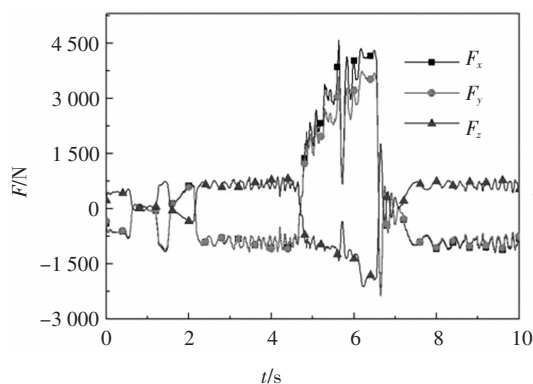


图 13 直行制动轮心三向力矩

Fig.13 Moment of the wheel center when direct braking

过减速带工况下,试验所测轮心六分力信号在 $t = 6.5$ s 左右的时刻出现了较为明显的波动,对应于后轮驶过减速带时悬架的垂向位移变化较大的时刻.直行制动工况下,在 $t = 5$ s 左右紧急制动,轮心

六分力信号出现明显波动,以这两组数据作为输入,预测所得 B_1 铰点动态力分别如图 14 与图 15 所示.

图 14 过减速带 B_1 铰点动态力Fig.14 Dynamic force of point B_1 when passing through the reducer图 15 直行制动 B_1 铰点动态力Fig.15 Dynamic force of point B_1 when direct braking

过减速带工况下,预测所得载荷在 $t = 6.5$ s 左右时出现了不同程度的波动,尤其是 Z 向力幅值变化较大,符合汽车过减速带时悬架垂向跳动明显的运动趋势;直行制动工况下,在制动的时刻同样出现了较为明显的载荷波动,说明该方法可应用于实车载荷预测.

5 结 论

1) 将 Udwadia-Kalaba 理论应用于悬架系统动力学建模中,研究了将轮心六分力进行分解进而获取悬架零部件动态载荷的计算方法,阐明了方法的原理和建模步骤,并以五连杆后悬架进行实例建模和数值计算,求得各零部件的动态载荷.该方法思路清晰,无需借助拉格朗日乘子,计算结果准确、高

效,对于其他类型的独立悬架系统同样适用。

2)将该方法应用于实车道路试验中,根据实测轮心六分力,预测了过减速带和直行制动工况下悬架零部件动态载荷,取得了较好的效果,预测所得载荷可用于指导悬架构件的强度、疲劳等问题的研究。

参考文献

- [1] ENSOR D, COOK C, BIRTLES M. Optimising simulation and test techniques for efficient vehicle durability design and development [C]//2005 The Automotive Research Association of India. Pune: SAE, 2005: 26—42.
- [2] 成永刚, 郑松林, 冯金芝, 等. 轿车悬架耐久性试验载荷谱的优化研究[J]. 汽车工程, 2009, 31(5): 467—470.
CHENG Y G, ZHENG S L, FENG J Z, *et al.* Study on optimization of durability test load spectrum of car suspension [J]. Automobile Engineering, 2009, 31(5): 467—470. (In Chinese)
- [3] 卿宏军, 韩旭, 陈志夫, 等. 某轿车结构载荷谱采集与分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2012, 39(12): 32—36.
QING H J, HAN X, CHEN Z F, *et al.* Collection and analysis of structural load spectrum of a car [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2012, 39(12): 32—36. (In Chinese)
- [4] 张少辉, 刘俊, 刘亚军. 基于六分力仪提取载荷的某乘用车副车架疲劳分析[J]. 农业装备与车辆工程, 2017, 55(6): 49—53.
ZHANG S H, LIU J, LIU Y J. Fatigue analysis of the subframe of a passenger vehicle based on the load spectrum extracted by the six-component force Meter [J]. Agricultural Equipment and Vehicle Engineering, 2017, 55(6): 49—53. (In Chinese)
- [5] 曹建. 某 SUV 白车身疲劳耐久性分析[D]. 长春: 吉林大学机械科学与工程学院, 2016: 19—26.
CAO J. Fatigue durability analysis of a SUV white body [D]. Changchun: College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, 2016: 19—26. (In Chinese)
- [6] 谷正气, 臧晓蕾, 伍文广, 等. 矿用清障车托举机构疲劳寿命分析及结构优化[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2014, 41(2): 58—63.
GU Z Q, ZANG X L, WU W G, *et al.* Fatigue life analysis and structure optimization of lifting mechanism of mine barrier cleaning vehicle [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2014, 41(2): 58—63. (In Chinese)
- [7] 李明月, 李明山, 王金起, 等. 基于轮心六分力的载荷分解方法[J]. 计算机辅助工程, 2013, 22(S1): 60—62.
LI M Y, LI M S, WANG J Q, *et al.* Load decomposition method based on wheel center six-component force [J]. Computer Assistant Engineering, 2013, 22(S1): 60—64. (In Chinese)
- [8] 李艳军. 基于 FLUENT 和 ADAMS 的导弹分离联合仿真分析 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学航天学院, 2012: 28—38.
LI Y J. Simulation analysis of missile separation based on FLUENT and ADAMS [D]. Harbin: College of Aerospace, Harbin Institute of Technology, 2012: 28—38. (In Chinese)
- [9] ZHAO H, ZHEN S C, CHEN Y H. Dynamic modeling and simulation of multi-body systems using the Udwadia-Kalaba theory [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2013, 26(5): 839—850.
- [10] 黄康, 段松林, 甄圣超, 等. 基于系统约束的重型汽车动力学建模及分析[J]. 中国机械工程, 2017, 28(4): 478—486.
HUANG K, DUAN S L, ZHEN S C, *et al.* Dynamic modeling and analysis of heavy duty vehicle based on system constraints [J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28(4): 478—486. (In Chinese)
- [11] 姜建满. 基于变论域自适应模糊控制和 Udwadia-Kalaba 理论的自动离合器接合控制研究[D]. 合肥: 合肥工业大学汽车与交通工程学院, 2017: 65—78.
JIANG J M. Research on automatic clutch combination control based on adaptive fuzzy control of variable range domain and Udwadia-Kalaba theory [D]. Hefei: College of Automotive and Traffic Engineering, Hefei University of Technology, 2017: 65—78. (In Chinese)
- [12] 赵睿英, 焦生杰, 王欣. 多手指机器人动力学建模方法[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2015, 35(3): 151—158.
ZHAO R Y, JIAO S J, WANG X. Dynamic modeling method of multi-finger robot [J]. Journal of Chang'an University (Natural Sciences), 2015, 35(3): 151—158. (In Chinese)
- [13] 代林. 考虑衬套非线性特性的悬架系统中铰接点载荷的计算方法及程序开发[D]. 广州: 华南理工大学机械与汽车工程学院, 2013: 17—21.
DAI L. Calculation method and program development of hinge load in suspension system considering nonlinear characteristics of bushing [D]. Guangzhou: College of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, 2013: 17—21. (In Chinese)
- [14] WITTBRODT E, ADMIEC-WÓJCIK I, WOJCIECH S. Dynamics of flexible multibody systems. rigid finite element method [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006: 23—26.
- [15] 奉铜明. 汽车多连杆悬架的多目标优化与分析[D]. 长沙: 湖南大学机械与运载工程学院, 2011: 9—10.
FENG T M. Multi objective optimization and analysis of automobile multi-link suspension [D]. Changsha: College of Mechanical and Transport Engineering, Hunan University, 2011: 9—10. (In Chinese)